*Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων*

## 5η Εβδομάδα, 1η και 2η Διάλεξη

### Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Με $t$ θα συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή και με

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

την προσδιοριστέα διανυσματική συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο).

Έστω έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, t). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Με $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ θα συμβολίσουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = (\Phi_1(\mathbf{x}, t), \ldots, \Phi_n(\mathbf{x}, t)).$$

Ο συμβολισμός $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ή αλλοιώς $\mathbf{x}'(t)$ θα σημαίνει

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}) \text{ ή } \mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

και το ολοκλήρωμα του $\mathbf{x}(t)$ θα είναι διάνυσμα με συνιστώσες

$$\int_a^b \mathbf{x}(t)dt = \Big( \int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt \Big).$$

Στην περίπτωση $n = 2$ και $n = 3$, μερικές φορές, αντί για $(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2, x_3)$ θα γράφουμε $(x, y)$, $(x, y, z)$ αντιστοίχως.

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς μπορούμε να γράψουμε το σύστημα σε διανυσματική μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t).$$

Με $|\mathbf{x}|$ συμβολίζουμε το μήκος του διανύσματος $\mathbf{x}$, δηλαδή

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

παρομοίως

$$|\mathbf{\Phi}| = \sqrt{\Phi_1^2 + \cdots + \Phi_n^2}.$$

**Ορισμός**. *Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz (ή είναι Lipschitz συνεχής) ως προς $\mathbf{x}$ σε κάποιο χωρίο $\Omega \times (a, b) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, εάν υπάρχει σταθερά $K > 0$ τ.ω.*

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \tag{0.2}$$

*για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ και $t \in (a, b)$.*

Εδώ και στο εξής, παρομοίως με το $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

**Παράδειγμα 0.1**. Το διανισματικό πεδίο

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

όπου $\mathbf{A}(t)$ δοσμένος πίνακας με φραγμένα στοιχεία και $\mathbf{f}$ δοσμένη (διανυσματική) συνάρτηση, ικανοποιεί την (0.2) για όλα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Πράγματι, σε αυτή τη περίπτωση

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| = |\mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}(t)\mathbf{y}| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{0.3}$$

με $K = \max_{t\in(a,b)} \|\mathbf{A}(t)\|$. Εδώ $\|\mathbf{A}(t)\|$ είναι το μέτρο του πίνακα $A$ με στοιχεία $a_{ij}(t)$, π.χ. μπορούμε νε πάρουμε

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(t)\Big)^{1/2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ανισότητα

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{A}\||\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Θα τονίσουμε ότι εδώ η σταθερά $K$ μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητη από $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. ⋆

**Παράδειγμα 0.2**. Το διανισματικό πεδίο

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (x_1^2,\, x_2^2)$$

ικανοποιεί την (0.2) μόνο σε φραγμένα χωρία αφού δεν υπάρχει τέτοια σταθερά $K < +\infty$ αν το χωρίο δεν είναι φραγμένο. Πράγματι, έστω $\Omega$ φραγμένο χωρίο, έχουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y})| = |(x_1^2 - y_1^2,\, x_2^2 - y_2^2)| = \sqrt{(x_1^2 - y_1^2)^2 + (x_2^2 - y_2^2)^2} =$$
$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2(x_2 - y_2)^2} \leq$$
$$K\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

όπου

$$K = \max\{\max_{\Omega} |x_1 + y_1|, \max_{\Omega} |x_2 + y_2|\}.$$

Εδώ η σταθερά εξαρτάται από $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Αν το χωρίο δεν είναι φραγμένο, τότε όποια και αν είναι η σταθερά $K < +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε π.χ. $|x_1 + y_1| = |x_2 + y_2| > K$ και συνεπώς

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2(x_2 - y_2)^2} =$$
$$|x_1 + y_1|\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} > K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Προφανώς το ίδιο ισχύει και για $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$ με $n > 2$.

**Ορισμός**. *Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ *είναι της κλάσεως* $\mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$, *αν η κάθε συνιστώσα* $\Phi_k$ *είναι της κλάσεως* $\mathbf{C}^1$ *ως προς* $\mathbf{x}$.

**Λήμμα 0.1**. Αν $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$ σε κάποιο κυρτό χωρίο $\Omega$, τότε είναι *Lipschitz* συνεχής (ως προς $\mathbf{x}$) συνάρτηση στο $\Omega$.

**Απόδειξη**. Έστω

$$M = \sup_{\Omega, i,j=1,\ldots,n} |\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}|.$$

Για κάθε $\Phi_i(\mathbf{x},t)$, με σταθεροποιημένα $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$t$ και μεταβλητή $s$ έχουμε

$$\frac{d}{ds}[\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)y_k,$$

όπου $z_k = \mathbf{x}_k + sy_k$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $\Phi_i(\mathbf{z},t)$, όπου $\mathbf{z} = \mathbf{x}+s\mathbf{y}$, $0 \le s \le 1$, θα πάρουμε

$$\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \Phi_i(\mathbf{x},t) = \frac{d}{d\,s}[\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)]\Big|_{s=s_i^*}$$

και επομένως

$$\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \Phi_i(\mathbf{x},t) = \frac{d}{d\,s}[\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)]\Big|_{s=s_i^*} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*} y_k, \tag{0.4}$$

για κάποιο $s_i^* \in [0,1]$. $\Big($ Πράγματι για την $h_i(s) = \Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)$ έχουμε

$$\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \Phi_i(\mathbf{x},t) = h_i(1) - h_i(0) = h_i'(s_i^*) = \frac{d}{d\,s}[\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)]\Big|_{s=s_i^*}$$

για κάποιο $s_i^* \in [0,1]$. $\Big)$ Από την (0.4) προκύπτει ότι $\forall i$

$$\Big(\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \Phi_i(\mathbf{x},t)\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*} y_k\Big)^2 \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*}\big)^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \le nM^2|\mathbf{y}|^2, \tag{0.5}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$ για το δεξί μέρος της (0.4). Αθροίζοντας την (0.5) ως προς $i$, θα πάρουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)|^2 \le n^2M^2|\mathbf{y}|^2.$$

Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα, λαμβάνουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{y},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)| \le nM|\mathbf{y}|. \tag{0.6}$$

Όπου η (0.6) είναι η συνθήκη του $Lipschitz$ για την $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)$, με σταθερά του $Lipschitz$ να είναι η $K = nM$.
$\square$

Θυμίζουμε την ανισότητα $Cauchy - Schwartz$: έστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ δυο διανύσματα στον $\mathbf{R}^n$, τότε

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

ή

$$\big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\big)^2 \le \big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\big)\big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\big).$$

όπου $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ και $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ανισότητα. Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overline{\phi}(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\overline{\phi}(t) = \big(\phi_1(t), ..., \phi_n(t)\big)$ είναι συνεχές, τότε

$$\Big| \int_{t_0}^{t} \overline{\phi}(\tau) d\tau \Big| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} |\overline{\phi}(\tau)| d\tau \Big|. \tag{0.7}$$

Πράγματι, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $(t_0, t)$ σε $m$ ισα διαστήματα μήκους $\Delta t = |t - t_0|/m$, $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = 1, ..., m$. Έχουμε

$$\Big| \int_{t_0}^{t} \overline{\phi}(\tau) d\tau \Big| = \Big| \Big( \int_{t_0}^{t} \phi_1(\tau) d\tau, ..., \int_{t_0}^{t} \phi_n(\tau) d\tau \Big) \Big| =$$

$$\Big| \Big( \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_1(t_k)\Delta t, ..., \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_n(t_k)\Delta t \Big) \Big| \leq$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \big| \big(\phi_1(t_k), ..., \phi_n(t_k)\big) \big| \big|\Delta t\big| = \Big| \int_{t_0}^{t} |\overline{\phi}(\tau)| d\tau \Big|.$$

Η (0.7) είναι η επάκταση της γνωστής για μια συνάρτηση $h(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ανισότητας

$$\Big| \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau \Big| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} |h(\tau)| d\tau \Big|.$$

Εστω $t_0$ δοσμένος αριθμός και $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n)$ δοσμένο διάνυσμα. Πρόβλημα *Cauchy* (ή πρόβλημα αρχικών τιμών): για $T > 0$ να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), \ \ \text{για} \ \ |t - t_0| < T, \tag{1.1}$$

η οποία επαλήθαυει τη συνθήκη

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}. \tag{1.2}$$

Θα ξεκινήσουμε με την μοναδικότητα της λύσης και θα δώσουμε διαφορετική απόδειξη σε σχέση με την περίπτωση $n = 1$.

**Θεώρημα 1.1.** *Αν το διανυσματικό πεδίο $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς $\mathbf{x}$ σε ένα χωρίο $\Omega \times (t_0 - T, t_0 + T) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, όπου $\mathbf{c} \in \Omega$, τότε υπάρχει το πολύ μια λύση του προβλήματος (1.1), (1.2).*

**Απόδειξη**. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δυο λύσεις $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$, όπου $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{c}$. Εισάγουμε την συνάρτηση $\sigma(t)$ η οποία ισούται με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$:

$$\sigma(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k(t) - y_k(t)]^2 \geq 0. \tag{1.3}$$

Παραγωγίζουμε την $\sigma(t)$, έχοντας υπόψη ότι $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι λύσεις του συστήματος (1.1)

$$\sigma'(t) = 2\sum_{k=1}^{n} [x_k(t) - y_k(t)][\Phi_k(\mathbf{x}, t) - \Phi_k(\mathbf{y}, t)] =$$

$$= 2[\mathbf{x} - \mathbf{y}] \cdot [\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)].$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, θα πάρουμε

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad \sigma'(t) \leq |\sigma'(t)| = 2|(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t))| \leq \\ \leq 2|\mathbf{x}-\mathbf{y}||\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)| \leq 2K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = 2K\sigma(t).\end{aligned}$$

Από την (1.4) αμέσως προκύπτει ότι

$$\sigma' \leq 2K\sigma \Longrightarrow (\sigma' - 2K\sigma)e^{-2Kt} \leq 0 \Longrightarrow (\sigma e^{-2Kt})' \leq 0,$$

άρα για $t \geq t_0$

$$\sigma(t)e^{-2Kt} \leq \sigma(t_0)e^{-2Kt_0} \Longrightarrow \sigma(t) \leq \sigma(t_0)e^{2K(t-t_0)}.$$

Αφού $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, έχουμε $\sigma(t_0) = 0$ και επομένως $\sigma(t) \leq 0$. Από την (1.3) προκύπτει ότι $\sigma(t) \equiv 0$ και $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 \equiv 0$ για $t \geq t_0$.

Συνεπώς $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$ για $t \geq t_0$.

Με παρομοιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση $t < t_0$. Είναι προφανές ότι $-\sigma'(t) \leq |\sigma'(t)|$ και επομένως

$$-\sigma' \leq 2K\sigma \Longrightarrow \sigma' \geq -2K\sigma \Longrightarrow (\sigma e^{2Kt})' \geq 0.$$

Άρα για $t \leq t_0$ έχουμε

$$\sigma(t)e^{2Kt} \leq \sigma(t_0)e^{2Ka} \Longrightarrow \sigma(t) \leq \sigma(t_0)e^{2K(t_0-t)}.$$

Συνεπώς $\sigma(t) \equiv 0$ για $t \leq t_0$, δηλαδή $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$ για $t \leq t_0$.

□

Προφανώς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα και στην περίπτωση μιας εξίσωσης. Το θεώρημα μοναδικότητας ισχύει υπό πιο γενικές συνθήκες, συγκεκριμένα:

**Θεώρημα 1.2** ($Osgood$). *Αν σε ένα χωρίο $\Omega \times (t_0 - T, t_0 + T) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ (με $\mathbf{c} \in \Omega$) η κάθε συνιστώσα του $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ικανοποιεί την*

$$|\Phi_i(\mathbf{x},t) - \Phi_i(\mathbf{y},t)| \leq \varphi(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|), \quad i = 1, \dots, n,$$

*όπου $\varphi(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση, η οποία*
*1. $\varphi(u) > 0$ για $u > 0$ και*
*2.*

$$\int_\varepsilon^a \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty, \ \text{ όταν } \ \varepsilon \to 0 \ \ (a > \varepsilon),$$

*τότε υπάρχει το πολύ μια λύση του προβλήματος (1.1), (1.2).*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 είναι παρόμοια με την απόδειξη που δώσαμε για μια εξίσωση.

Θα περάσουμε τωρα στην ύπαρξη της λύσης. Όπως και στην περίπτωση μιας διαφορικής εξίσωσης, για να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της τοπικής λύσης, θα ακολουθήσουμε την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Το πρώτο βήμα είναι να περάσουμε από το διαφορικό σύστημα σε ολοκληρωτικό σύστημα, που είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα $Cauchy$ (1.1), (1.2). Έστω $\mathbf{x}(t)$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος (1.1), ολοκληρώνουμε αυτό το σύστημα ως προς $t$ από $t_0$ και έχουμε

$$\int_{t_0}^t \mathbf{x}'(\tau)d\tau = \Big(\int_{t_0}^t x_1'(\tau)d\tau, \dots, \int_{t_0}^t x_n'(\tau)d\tau\Big) =$$

$$(x_1(t) - x_1(t_0), \ldots, x_n(t) - x_n(t_0)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0).$$

Άρα

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

και αφού $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \tag{1.5}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνεχής λύση της (1.5) θα είναι και η λύση του προβλήματος (1.1), (1.2). Αν η $\mathbf{x}(t)$ είναι συνεχής, τότε και η $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ θα είναι συνεχής, επομένως το δεξί μέρος της (1.5) έχει παράγωγο ως προς $t$, συνεπώς και το αριστερό μέρος είναι παραγωγίσιμο ως προς $t$, άρα παραγωγίζοντας την (1.5) παίρνουμε

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t),$$

δηλαδή η $\mathbf{x}(t)$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος. Είναι προφανές ότι $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$.

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση ύπαρξης της ολικής λύσης.

**Θεώρημα 1.3** (ολική ύπαρξη). *Έστω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι συνεχές ως προς $t$ και ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ (0.2) στο διάστημα $|t - t_0| \le T$ για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Τότε για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $\mathbf{c}$ το πρόβλημα $Cauchy$ (1.1), (1.2) έχει μια και μοναδική λύση στο $|t - t_0| \le T$.*

**Απόδειξη**. Κατασκευάζουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις του προβλήματος:

$$\overline{\phi}_m(t) = \mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}\big(\overline{\phi}_{m-1}(\tau), \tau\big) d\tau, \quad m > 0,$$

$\overline{\phi}_0(t)$ τυχαία συνεχής συνάρτηση τ.ω. $\overline{\phi}_0(t_0) = \mathbf{c}$. Αφού η $\overline{\phi}_0$ είναι συνεχής στο $|t - t_0| \le T$, τότε και η $\overline{\phi}_1$ θα είναι συνεχής στο $|t - t_0| \le T$ κ.ο.κ. Επομένως όλες οι προσεγγίσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\overline{\phi}_0(t), \ \overline{\phi}_1(t), \ \overline{\phi}_2(t), \ \ldots, \ \overline{\phi}_m(t), \ \ldots \tag{1.6}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|t - t_0| \le T$. Ας τονίσουμε εδώ ότι τα $\overline{\phi}_m$ είναι διανύσματα:

$$\overline{\phi}_m(t) = \big(\phi_{m1}(t), \phi_{m2}(t), \ldots, \phi_{mn}(t)\big), \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Έστω

$$M = \max_{|t - t_0| \le T} |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, t)|.$$

Το $M < \infty$, επειδή συνεχής σε κλειστό διάστημα συνάρτηση είναι φραγμένη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t_0 = 0$ και $t \in [0, T]$. Η απόδειξη για αυθαίρετο $t_0$ και για $t < t_0$ γίνεται με χρήση της αντικατάστασης $t \to t + t_0$, $t \to t_0 - t$ αντίστοιχα. Θέτουμε για λόγους απλότητας $\overline{\phi}_0 \equiv \mathbf{c}$, επομένως

$$|\overline{\phi}_1(t) - \overline{\phi}_0(t)| = |\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau) d\tau| \le \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)| d\tau \le M \int_0^t d\tau = Mt,$$

$$|\overline{\phi}_2(t) - \overline{\phi}_1(t)| = |\int_0^t [\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_1(\tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)] d\tau| \le \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_1, \tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)| d\tau \le$$

$$\leq \int_0^t K|\overline{\phi}_1(\tau) - \overline{\phi}_0(\tau)|d\tau \leq K\int_0^t M\tau d\tau = KMt^2/2.$$

Ομοίως παίρνουμε

$$|\overline{\phi}_3(t) - \overline{\phi}_2(t)| \leq K\int_0^t |\overline{\phi}_2(\tau) - \overline{\phi}_1(\tau)|d\tau \leq K\int_0^t KM\tau^2/2d\tau = \frac{K^2M}{2}\frac{t^3}{3},$$

$$\cdots$$

$$|\overline{\phi}_{m+1}(t) - \overline{\phi}_m(t)| \leq \frac{M}{K}\frac{(Kt)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Όπως και στην περίπτωση μιας διαφορικής εξίσωσης, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ακολουθία (1.6) με την σειρά

$$\overline{\phi}_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty}[\overline{\phi}_{m+1}(t) - \overline{\phi}_m(t)], \tag{1.7}$$

$$\Big(\text{ δηλαδή } \phi_{0i}(t) + \sum_{m=0}^{\infty}[\phi_{m+1i}(t) - \phi_{mi}(t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n\Big)$$

της οποίας το $m$-οστο μερικό άθροισμα συμπίπτει με την

$$\overline{\phi}_m(t) = (\phi_{m1}(t), \ \ldots, \ \phi_{mn}(t)).$$

Οι απόλυτες τιμές των μελών της (1.7) δεν υπερβαίνουν τα αντίστοιχα μέλη της σειράς

$$|\mathbf{c}| + \frac{M}{K}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Kt)^{m+1}}{(m+1)!},$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα για $|t| \leq T$ στην

$$\frac{M}{K}(e^{Kt} - 1) + |\mathbf{c}|.$$

Επομένως η σειρά (1.7) συγκλίνει ομοιόμορφα και ως συνέπεια παίρνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της (1.6). Απομένει να αποδείξουμε ότι η

$$\overline{\phi}(t) = \lim_{m\to\infty}\overline{\phi}_m(t)$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{\phi}(t)$ είναι λύση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης. Θεωρούμε την σχέση

$$|\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau - \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_k, \tau)d\tau| \leq \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_k, \tau)|d\tau \leq$$

$$\leq K\Big|\int_0^t |\overline{\phi}_m(\tau) - \overline{\phi}_k(\tau)|d\tau\Big| \to 0, \quad k, m \to \infty.$$

Επομένως

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau \to \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}, \tau)d\tau \ \text{ καθώς } \ m \to +\infty. \tag{1.8}$$

Θεωρούμε την σχέση

$$\overline{\phi}_{m+1}(t) = \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau. \tag{1.9}$$

Το αριστερό μέλος της (1.9) τείνει στο $\overline{\phi}(t)$. Από την (1.8) έχουμε ότι και το δεξί μέλος έχει όριο που ισούται με $\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}, \tau)d\tau$. Και επομένως, περνώντας στο όριο στην (1.9), για την $\overline{\phi}(t)$ θα έχουμε

$$\overline{\phi}(t) = \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}(\tau), \tau)d\tau.$$

Άρα η $\phi(t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}.$$

□

Παρατηρούμε ότι το Θεωρημα 1.3 (όπως και το αντίστοιχο για μία εξίσωση) μας δίνει μια ικανή και όχι αναγκαία συνθήκη ολικής επιλυσιμότητας. Θα διατυπώσουμε τώρα το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της τοπικής λύσης.

**Θεώρημα 1.4** ($Picard$). *Έστω η $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα χωρίο $\Omega \times (t_0 - T, t_0 + T) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ και ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ ως προς $\mathbf{x}$ για οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο χωρίο $\bar{\Omega}'$ που ανήκει εξολοκλήρου στο $\Omega$.*

*Τότε, για κάθε $(t_0, \mathbf{c}) \in \Omega$ υπάρχει ένα διάστημα $[a, b]$, το οποίο περιέχει το σημείο $t_0$, όπου υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος $Cauchy$ (1.1), (1.2).*

Το θεώρημα της ύπαρξης ισχύει υπό πιο γενικές συνθήκες, συγκεκριμένα:

**Θεώρημα 1.5** *(Peano). Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς $(\mathbf{x}, t)$ σε κάποιο χωρίο $\Omega \times (t_0 - T, t_0 + T) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια (τοπική) λύση της (1.1) που περνά από το δοσμένο σημείο $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega$.*

Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων είναι παρόμοιες με εκείνες για μια εξίσωση.

Ας κατασκευάσουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις στην περίπτωση δυο εξισώσεων. Έχουμε

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2, t), \quad x_1(t_0) = c_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2, t), \quad x_2(t_0) = c_2.$$

Ως μηδενική προσέγγιση ας πάρουμε την $\overline{\phi}_0(t) = (c_1, c_2)$, η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = c_1 + \int_{t_0}^t \Phi_1(c_1, c_2, \tau)d\tau,$$

$$\phi_{12}(t) = c_2 + \int_{t_0}^t \Phi_2(c_1, c_2, \tau)d\tau,$$

η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = c_1 + \int_{t_0}^t \Phi_1(\phi_{11}(\tau), \phi_{12}(\tau), \tau)d\tau,$$

$$\phi_{22}(t) = c_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi_2(\phi_{11}(\tau), \phi_{12}(\tau), \tau) d\tau,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

η $m$-οστή προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_m(t) = (\phi_{m1}(t), \phi_{m2}(t))$ με

$$\phi_{m1}(t) = c_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(\phi_{m-11}(\tau), \phi_{m-12}(\tau), \tau) d\tau,$$

$$\phi_{m2}(t) = c_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi_2(\phi_{m-11}(\tau), \phi_{m-12}(\tau), \tau) d\tau,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

**Παράδειγμα 1.1** Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος $Cauchy$

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2 + t^2, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = x + sin^2 y, \quad y(0) = 0,$$

παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα $\overline{\phi}_0(t) = (0, 0)$

**Λύση**. Η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{3},$$

$$\phi_{12}(t) = \int_0^t 0 d\tau = 0,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_1(t) = (t^3/3, 0)$.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = \int_0^t (\frac{\tau^3}{3} + \tau^2) d\tau = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3},$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \frac{\tau^3}{3} d\tau = \frac{t^4}{12},$$

δηλαδή $\overline{\phi}_2(t) = (t^4/12 + t^3/3, t^4/12)$. $\star$

**Παράδειγμα 1.2** Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος $Cauchy$

$$\frac{dx}{dt} = x - y + t, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα $\overline{\phi}_0(t) = (0, 1)$

**Λύση**. Η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = \int_0^t (-1 + \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} - t,$$

$$\phi_{12}(t) = 1 + \int_0^t 1 d\tau = 1 + t,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_1(t) = (t^2/2 - t, 1 + t)$.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = \int_0^t \big(\frac{\tau^2}{2} - \tau - 1\big) d\tau = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - t,$$

$$\phi_{22}(t) = 1 + \int_0^t \big(\frac{\tau^2}{2} + 1\big) d\tau = \frac{t^3}{6} + t + 1,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_2(t) = (t^3/6 - t^2/2 - t, t^3/6 + t + 1)$. $\star$